Acta Sci. Math., 48 (1985), 361—373

Über Approximationseigenschaften differenzierter Hermitescher Interpolationspolynome mit Jacobischen Abszissen

L. NECKERMANN und P. O. RUNCK

Herrn K. Tandori zum 60. Geburtstag gewidmet

1. Einleitung

Auf ihr Approximationsverhalten in bezug auf die m-te Ableitung einer in $[-1, 1]$ definierten und mindestens m-mal differenzierbaren reellen Funktion f werden Folgen von ebenfalls m-mal differenzierten f zugeordneten Hermiteschen Interpolationspolynomen $H_n[f]$ mit den Nullstellen $x_\nu = x_{\nu,n}(\alpha, \beta)$ der Jacobischen Orthogonalpolynome $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ $(\alpha > -1, \beta > -1)$ als Abszissen untersucht. Dabei werde das Hermitesche Interpolationspolynom mit m paarweise disjunkten Abszissen x_ν gegeben durch

$$(1.1) \qquad H_n[f;\ x] := \sum_{\nu=1}^{n} \big(h_\nu(x) f(x_\nu) + \mathfrak{h}_\nu(x) f'(x_\nu)\big)$$

mit

$$(1.2) \qquad h_\nu(x) = h_{\nu,n}(x) := v_\nu(x) l_\nu^2(x),$$

$$(1.3) \qquad v_\nu(x) = v_{\nu,n}(x) := 1 - \frac{\omega_n''(x_\nu)}{\omega_n'(x_\nu)}(x - x_\nu) = 1 + v_\nu'(x)(x - x_\nu)$$

und

$$(1.4) \qquad \mathfrak{h}_\nu(x) = \mathfrak{h}_{\nu,n}(x) := (x - x_\nu) l_\nu^2(x) = \frac{1}{[\omega_n'(x_\nu)]^2} \frac{\omega_n^2(x)}{(x - x_\nu)},$$

wobei l_ν die Lagrangeschen Grundpolynome

$$(1.5) \qquad l_\nu(x) = l_{\nu,n}(x) := \begin{cases} \dfrac{\omega_n(x)}{(x - x_\nu)\omega_n'(x_\nu)} & (x \neq x_\nu) \\ 1 & (x = x_\nu) \end{cases}$$

Eingegangen am 2. August, 1984.

mit

$$\omega_n(x) = c \prod_{\nu=1}^{n} (x-x_\nu), \quad 0 \neq c \in \mathbf{R} \tag{1.6}$$

sind.

Im Sonderfall der Jacobischen Polynome $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\omega_n(x)$ gilt für (1.3) (vgl. [10], S. 337 (14.5.1))

$$v_\nu(x) = 1 - \frac{\alpha-\beta+(\alpha+\beta+2)\,x_\nu}{1-x_\nu^2}(x-x_\nu). \tag{1.7}$$

In Satz 3 werden von α und β abhängende Bedingungen über f angegeben, unter denen die differenzierten Polynome $D^m H_n[f]=H_n^{(m)}[f]$ für $n\to\infty$ gleichmäßig im Intervall $[a,b]$ $(-1\leqq a<b\leqq 1)$ gegen $f^{(m)}$ konvergieren. Der Sonderfall $m=0$ sowie hiermit zusammenhängende Konvergenzuntersuchungen der verallgemeinerten Interpolationspolynome von Hermite—Fejér $\sum_{\nu=1}^{n} h_\nu(x) f(x_\nu) + \sum_{\nu=1}^{n} \mathfrak{h}_\nu(x) f_\nu'$ $(|f_\nu'|\leqq A<\infty)$ finden sich im wesentlichen (mit weiterer Literaturangabe) bei SZEGŐ [10], S. 338 f (man vergleiche hierzu auch SZABADOS [9]).

Entsprechende Untersuchungen über die m-mal differenzierten Lagrangeschen Interpolationspolynome wurden von den Verfassern in [5] durchgeführt. Die Approximationseigenschaften der differenzierten Lagrangeschen und Hermiteschen Interpolationspolynome werden am Schluß dieser Arbeit gegenübergestellt.

Um optimale Ergebnisse zu erhalten, verwenden wir analog zu [5] bei der Herleitung der Ergebnisse anstelle der Lebesguefunktionen $\sum_{\nu=1}^{n} |h_\nu(x)|$ und $\sum_{\nu=1}^{n} |\mathfrak{h}_\nu(x)|$ die von einem Hilfsparameter $\gamma\in\mathbf{R}$ abhängenden Funktionen

$$\mathscr{H}_n^m(x;\,\gamma) := \sum_{\nu=1}^{n} |D^m h_\nu(x)| \left(\frac{\sqrt{1-x_\nu^2}}{n}\right)^{\gamma} \quad (\gamma \geqq 0) \tag{1.8}$$

$$\mathfrak{H}_n^m(x;\,\gamma) := \sum_{\nu=1}^{n} |D^m \mathfrak{h}_\nu(x)| \left(\frac{\sqrt{1-x_\nu^2}}{n}\right)^{\gamma-1} \quad (\gamma \geqq 1) \tag{1.9}$$

Denn bei den Jacobischen Abszissen handelt es sich um Interpolationsstellen, für die $c_1/n \geqq |x_\nu - x_{\nu-1}| \geqq (c_2/n)\sqrt{1-x_\nu^2}>0$ $(\nu=2,\ldots,n;\ c_1, c_2\in\mathbf{R}^+$ unabhängig von $n)$ gilt. Mit Hilfe von $\mathscr{H}_n^m(x;\gamma)$ und $\mathfrak{H}_n^m(x;\gamma)$, deren asymptotisches Verhalten für $n\to\infty$ untersucht wird, und dem Approximationssatz von Jackson—Timan erhalten wir die Ergebnisse. (Man vergleiche hierzu [3], [6], [8].)

2. Hilfssätze über differenzierte Grundpolynome

In [5], Hilfssatz 1 wurden zwei verschiedene Darstellungen für die m-te Ableitung des n-ten Lagrangeschen Interpolationspolynoms $l_\nu(x)$ gegeben. Mit Rücksicht auf die bei der Hermiteschen Interpolation auftretenden Quadrate von $l_\nu(x)$ leiten wir in Analogie zu [5], Hilfssatz 1, entsprechende Formeln für $D^m l_\nu^2(x)$ sowie für $D^m \mathfrak{h}_\nu(x)$ und $D^m h_\nu(x)$ her. Es gilt

Hilfssatz 1.

$$D^m l_\nu^2(x) = \frac{(-1)^m m!}{[\omega_n'(x_\nu)]^2} \frac{{}^{(1)}\Omega_\nu{}^m(x)}{(x-x_\nu)^{m+2}} \quad (x \neq x_\nu,\ m \geqq 0) \tag{2.1}$$

mit

$$^{(1)}\Omega_\nu{}^m(x) := \sum_{\mu=0}^{m} \frac{(-1)^\mu (m-\mu+1)}{\mu!} (x-x_\nu)^\mu D^\mu \omega_n^2(x), \tag{2.2}$$

$$D^m l_\nu^2(x_\nu) = \frac{1}{(m+1)(m+2)[\omega_n'(x_\nu)]^2} D^{m+2} \omega_n^2(x_\nu) \tag{2.3}$$

bzw.

$$D^m l_\nu^2(x) = \frac{\delta^m}{2[\omega_n'(x_\nu)]^2} D^{m+2} \omega_n^2(\bar{x}), \tag{2.4}$$

mit

$$\bar{x} := x_\nu + \delta(x-x_\nu), \quad |\delta| \leqq 1.$$

Beweis. Die Ableitungsformel (2.1) mit (2.2) ergibt sich mit Hilfe der Leibnizschen Regel unmittelbar aus (1.5). Wegen ${}^{(1)}\Omega_\nu{}^m(x_\nu)=0,$

$$D^{(1)}\Omega_\nu{}^m(x) = \sum_{\mu=0}^{m} \frac{(-1)^\nu}{\mu!} (x-x_\nu)^\mu D^{\mu+1} \omega_n^2(x); \quad D^{(1)}\Omega_\nu{}^m(x_\nu) = 0$$

und

$$D^{2\,(1)}\Omega_\nu{}^m(x) = \frac{(-1)^m}{m!} (x-x_\nu)^m D^{m+2} \omega_n^2(x), \tag{2.5}$$

was direkt aus (2.2) folgt, hat das Polynom ${}^{(1)}\Omega_\nu{}^m(x)$ in x_ν eine $(m+2)$-fache Nullstelle. Hiermit und mit Hilfe der l'Hospitalschen Regel ergibt sich (2.3) aus (2.1). Nach dem Taylorschen Satz folgt wegen ${}^{(1)}\Omega_\nu{}^m(x_\nu) = D^{(1)}\Omega_\nu{}^m(x_\nu) = 0$ aus (2.5)

$$^{(1)}\Omega_\nu{}^m(x) = \frac{(-1)^m}{m!} \frac{(x-x_\nu)^2}{2} (\bar{x}-x_\nu)^m D^{m+2} \omega_n^2(\bar{x})$$

mit $\bar{x} = x_\nu + \delta(x-x_\nu)$, $|\delta| \leqq 1$, und hieraus (2.4).

Durch Übertragung des Beweises von [5], Hilfssatz 1, folgt für $\mathfrak{h}_\nu(x)$ aus (1.4)

Hilfssatz 2.

$$D^m \mathfrak{h}_\nu(x) = \frac{(-1)^m m!}{[\omega'_n(x_\nu)]^2} \frac{{}^{(2)}\Omega_\nu{}^m(x)}{(x-x_\nu)^{m+1}} \quad (x \neq x_\nu,\ m \geqq 0) \tag{2.6}$$

mit

$$ {}^{(2)}\Omega_\nu^m(x) := \sum_{\mu=0}^{m} \frac{(-1)^\mu}{\mu!}(x-x_\nu)^\mu D^\mu \omega_n^2(x), \tag{2.7}$$

$$ D^m \mathfrak{h}_\nu(x_\nu) = \frac{1}{(m+1)[\omega_n'(x_\nu)]^2} D^{m+1}\omega_n^2(x_\nu) \tag{2.8}$$

bzw.

$$ D^m \mathfrak{h}_\nu(x) = \frac{\delta^{*m}}{[\omega_n'(x_\nu)]^2} D^{m+1}\omega_n^2(x^*) \tag{2.9}$$

mit

$$x^* := x_\nu + \delta^*(x-x_\nu), \quad |\delta^*| \leqq 1.$$

Für $h_\nu(x)$ aus (1.2), (1.3) ergibt sich

Hilfssatz 3.

$$ D^m h_\nu(x) = v_\nu(x) D^m l_\nu^2(x) + m v_\nu'(x) D^{m-1} l_\nu^2(x) \quad (m \geqq 0). \tag{2.10}$$

3. Hilfssätze mit Jacobischen Polynomen $\omega_n(x) = P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$

Von nun an sei $\omega_n(x)$ stets das Jacobische Orthogonalpolynom $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ ($\alpha > -1, \beta > -1$) vom Grad n mit den voneinander verschiedenen Nullstellen $x_\nu = x_{\nu,n}(\alpha, \beta)$. Ferner bezeichne ebenso wie in [5], (12) (mit $x = \cos\vartheta$)

$$ \mathfrak{N}_n := \{\vartheta_\nu \quad \text{mit} \quad P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\vartheta_\nu) = 0\} \tag{3.1}$$

die Menge der Nullstellen von $P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\vartheta)$, die der Größe nach geordnet seien. Zu vorgegebenem ϑ sei weiter wie in [5], (26) und (16)

$$ \mathfrak{M}_n = \mathfrak{M}_n(\vartheta, c) := \left\{\vartheta_\nu \in \mathfrak{N}_n \quad \text{mit} \quad |\vartheta-\vartheta_\nu| < \frac{c}{n}\right\} \subset \mathfrak{N}_n \tag{3.2}$$

(mit festem $c > 2\pi$) und

$$ \vartheta_j = \vartheta_{j(n,\vartheta)} := \min_i \{\vartheta_i \quad \text{mit} \quad |\vartheta-\vartheta_i| = \min_{\vartheta_\nu \in \mathfrak{M}_n} |\vartheta-\vartheta_\nu|\} \in \mathfrak{M}_n \tag{3.3}$$

die (gegebenenfalls kleinere) zu ϑ nächstbenachbarte Nullstelle aus $\mathfrak{M}_n$.

Hilfssatz 4. a) *Für* $0 \leqq \vartheta \leqq \pi/2$ *und* $n \to \infty$ *gilt*

$$ v_\nu(x) = \begin{cases} \vartheta_\nu^{-2}((1+\alpha)\vartheta_j^2 - \alpha\vartheta_\nu^2) + O\left(\vartheta_\nu^{-2}\left(\dfrac{\vartheta_j}{n} + \vartheta_j^4\right) + \vartheta_\nu^2 + \vartheta_j^2\right) & \left(0 < \vartheta_\nu \leqq \dfrac{\pi}{2}\right) \\ O((\pi-\vartheta_\nu)^{-2}) & \left(\dfrac{\pi}{2} \leqq \vartheta_\nu < \pi\right). \end{cases} \tag{3.4}$$

b) *für* $0 \leqq \vartheta \leqq \pi/2$ *und* $n \to \infty$ *gilt ferner*

$$v_\nu'(x) = \begin{cases} -(2\alpha+2)\vartheta_\nu^{-2}(1+O(\vartheta_\nu^2)) & \left(0 < \vartheta_\nu \leqq \dfrac{\pi}{2}\right) \\ O((\pi-\vartheta_\nu)^{-2}) & \left(\dfrac{\pi}{2} \leqq \vartheta_\nu < \pi\right) \end{cases} \tag{3.5}$$

Beweis. Aus (1.7) folgt $v_\nu(x) = (1-x_\nu^2)^{-1}\{1+(2\alpha+1)x_\nu^2-(2\alpha+2)xx_\nu+$ $+(\beta-\alpha)(1-x_\nu)(x-x_\nu)\}$ bzw. $v_\nu'(x) = (1-x_\nu^2)^{-1}\{-(2+2\alpha)x_\nu+(\beta-\alpha)(1-x_\nu)\}$ und hieraus (3.4) und (3.5) mittels $x = 1-(1/2)\vartheta_j^2+O((\vartheta_j/n)+\vartheta_j^4)$ und $x_\nu = 1-(1/2)\vartheta_\nu^2+$ $+O(\vartheta_\nu^4)$ $(0 \leqq \vartheta, \vartheta_\nu \leqq \pi/2)$.

Weiter folgt aus [5], Hilfssätze 3 und 4 wegen

$$D^\mu \omega_n^2(x) = \sum_{\lambda=0}^{\mu} \binom{\mu}{\lambda} D^\lambda \omega_n(x) D^{\mu-\lambda}\omega_n(x)$$

in der Bezeichnung von (3.3)

Hilfssatz 5. *Für* $n \to \infty$ *gilt mit* $0 \leqq \vartheta \leqq \pi/2$

$$D_x^\mu [P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\vartheta)]^2 = O(n^{\mu-1})\vartheta_j^{-2\alpha-\mu-1} \tag{3.6}$$

$$(D_x[P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\vartheta_\nu)])^{-2} = \begin{cases} O(\vartheta_\nu^{2\alpha+3}n^{-1}) & \left(0 < \vartheta_\nu \leqq \dfrac{\pi}{2}\right) \\ O((\pi-\vartheta_\nu)^{2\beta+3}n^{-1}) & \left(\dfrac{\pi}{2} \leqq \vartheta_\nu < \pi\right). \end{cases} \tag{3.7}$$

Für die Hilfsfunktion

$$\psi_\nu^{\mu,m}(x;\gamma) := \frac{(1-x_\nu^2)^{\gamma/2}n^{-\gamma}}{[DP_n^{(\alpha,\beta)}(x_\nu)]^2}\,\frac{|D^\mu[P_n^{(\alpha,\beta)}(x)]^2|}{|x-x_\nu|^{m+2-\mu}} \quad (0 \leqq x \leqq 1,\ x \neq x_\nu) \tag{3.8}$$

folgt aus diesem Hilfssatz 5 und der Ungleichung

$$\left|\frac{\vartheta^2-\vartheta_\nu^2}{\cos\vartheta-\cos\vartheta_\nu}\right| < \frac{3\sqrt{2}}{4}\pi^2 \quad \left(0 \leqq \vartheta \leqq \frac{\pi}{2},\ 0 < \vartheta_\nu < \pi\right) \tag{3.9}$$

in der Bezeichnung von (3.3)

Hilfssatz 6. *Für* $0 \leqq \vartheta \leqq \pi/2$ *und* $0 < \vartheta_\nu < \pi$ *gilt, falls* $\vartheta_\nu \notin \mathfrak{M}_n$, *für* $n \to \infty$

(3.10)

$$\psi_\nu^{\mu,m}(x;\gamma) = O(1)\,n^{\mu-\gamma-2}\vartheta_j^{-2\alpha-\mu-1}|\vartheta_j^2-\vartheta_\nu^2|^{\mu-m-2}\cdot \begin{cases} \vartheta_\nu^{\gamma+2\alpha+3} & \left(0 < \vartheta_\nu \leqq \dfrac{\pi}{2}\right) \\ (\pi-\vartheta_\nu)^{\gamma+2\beta+3} & \left(\dfrac{\pi}{2} \leqq \vartheta_\nu < \pi\right) \end{cases}$$

mit einem nichtnegativen Hilfsparameter γ *und* $\mu = 0, 1, \ldots, m$.

4. Abschätzung von $\mathscr{H}_n^m(x;\gamma)$ mit $\omega_n(x)=P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ für $n\to\infty$

Zur Abschätzung der durch (1.8) und (1.9) mit $\omega_n(x)=P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ gegebenen Summen $\mathscr{H}_n^m(x;\gamma)$ und $\mathfrak{H}_n^m(x;\gamma)$ für hinreichend große Werte von n genügt es $0\leqq x=\cos\vartheta\leqq 1$ zu wählen. Zunächst wird das Verhalten von $\mathscr{H}_n^m(x;\gamma)$ für $n\to\infty$ untersucht, wobei sich das Abschätzungsverfahren an den Aufbau der Abschätzung von $\mathscr{L}_n^m(x;\gamma)$ in [5] anschließt. Nach (1.8), (1.2), (1.3) und Hilfssatz 3 gilt

$$\mathscr{H}_n^m(x;\ \gamma)\leqq\sum_{\nu=1}^{n}\Phi_\nu{}^m(x;\ \gamma) \tag{4.1}$$

mit

$$\Phi_\nu{}^m(x;\ \gamma):=\{|v_\nu(x)D^m l_\nu{}^2(x)|+m|v_\nu{}'(x)D^{m-1}l_\nu{}^2(x)|\}(1-x_\nu{}^2)^{\gamma/2}n^{-\gamma} \tag{4.2}$$

a) $\vartheta_\nu\in\mathfrak{M}_n$; $0\leqq\vartheta\leqq\pi/2$. Nach (3.2) und (3.3) gilt $\vartheta_\nu=O(\vartheta_j)$ und $\vartheta=O(\vartheta_j)$ für $n\to\infty$. Ferner ergibt sich aus (2.4) für $\omega_n(x)=P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ unter Heranziehung der Hilfssätze 4 und 5 für $n\to\infty$

$$|v_\nu(x)D^m l_\nu{}^2(x)|(1-x_\nu{}^2)^{\gamma/2}n^{-\gamma}=O(1)n^{m-\gamma}\vartheta_j{}^{\gamma-m}\quad(m\geqq 0) \tag{4.3}$$

$$|v_\nu{}'(x)D^{m-1}l_\nu{}^2(x)|(1-x_\nu{}^2)^{\gamma/2}n^{-\gamma}=O(1)n^{m-\gamma-1}\vartheta_j{}^{\gamma-m-1}\quad(m\geqq 1). \tag{4.4}$$

Da nach [5], Hilfssatz 2 $(1/(n\vartheta_j))=O(1)$ für $n\to\infty$ gilt und die Anzahl der $\vartheta_\nu\in\mathfrak{M}_n$ gleichmäßig beschränkt ist, folgt aus (4.2—4)

$$\sum_{\vartheta_\nu\in\mathfrak{M}_n}\Phi_\nu{}^m(x;\ \gamma)=O(1)n^{m-\gamma}\vartheta_j{}^{\gamma-m}\quad\text{für}\quad n\to\infty. \tag{4.5}$$

b) $\vartheta_\nu\notin\mathfrak{M}_n$; $0\leqq\vartheta\leqq\pi/2$. Für $\vartheta_\nu\notin\mathfrak{M}_n$ schätzen wir aufgrund von (2.1) mit (2.2) jeden Summanden $\Phi_\nu{}^m(x;\gamma)$ aus (4.2) für $\omega_n(x)=P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ wie folgt weiter ab

$$\Phi_\nu{}^m(x;\ \gamma)\leqq\sum_{\mu=0}^{m}\varphi_\nu{}^\mu(x;\ \gamma)\quad(\vartheta_\nu\notin\mathfrak{M}_n) \tag{4.6}$$

mit

$$\varphi_\nu{}^\mu(x;\ \gamma):=\{(m-\mu+1)|v_\nu(x)|+(m-\mu)|(x-x_\nu)v_\nu{}'(x)|\}\frac{m!}{\mu!}\psi_\nu{}^{\mu,m}(x;\ \gamma) \tag{4.7}$$

und den in (3.8) definierten $\psi_\nu{}^{\mu,m}(x;\gamma)$. Hierfür gilt der

Hilfssatz 7. *Ist* $\vartheta_\nu \notin \mathfrak{M}_n$, $0 \leqq \vartheta \leqq \pi/2$, *so gelten für* $n \to \infty$

$$\varphi_\nu^\mu(x;\gamma) = O(1) n^{m-\gamma-1} \vartheta_j^{\gamma-m-1} \quad \left(0 < \vartheta_\nu \leqq \frac{2}{3}\vartheta_j\right) \tag{4.8}$$

$$\varphi_\nu^\mu(x;\gamma) = O(1) n^{\mu-\gamma-2} \vartheta_j^{\gamma-m} |\vartheta_j - \vartheta_\nu|^{\mu-m-2} \quad \left(\frac{2}{3}\vartheta_j \leqq \vartheta_\nu \leqq \frac{3}{2}\vartheta_j;\ \vartheta_\nu \notin \mathfrak{M}_n\right) \tag{4.9}$$

$$\varphi_\nu^\mu(x;\gamma) = O(1)[\vartheta_j^2 \vartheta_\nu^{-2} + \alpha + (m-\mu)] n^{\mu-\gamma-2} \vartheta_j^{-2\alpha-\mu-1} \vartheta_\nu^{\gamma-2m+2\mu+2\alpha-1} \quad \left(\frac{3}{2}\vartheta_j \leqq \vartheta_\nu \leqq \frac{\pi}{2}\right) \tag{4.10}$$

$$\varphi_\nu^\mu(x;\gamma) = O(1) n^{\mu-\gamma-2} \vartheta_j^{-2\alpha-\mu-1} (\pi - \vartheta_\nu)^{\gamma+2\beta+1} \quad \left(\frac{3}{2}\vartheta_j \leqq \vartheta_\nu \quad \textit{und} \quad \frac{\pi}{2} \leqq \vartheta_\nu < \pi\right). \tag{4.11}$$

Beweis. (4.8—11) folgen aus (4.7) und den Hilfssätzen 4 und 6, wobei für (4.8) $(n\vartheta_\lambda)^{-1} = O(1)$ $(\lambda = j, \nu)$ und für (4.10—11) die Beziehung $(\vartheta_\nu^2 - \vartheta_j^2)^{-1} \leqq 9/5\, \vartheta_\nu^{-2}$ $(3\vartheta_j/2 \leqq \vartheta_\nu < \pi)$ zu beachten sind.

Analog zu [5], Hilfssatz 6 erhalten wir weiter

Hilfssatz 8. *Für* $n \to \infty$ *gelten bei vorgegebenem* $\vartheta \in [0, \pi/2]$

$$\sum_{\vartheta_\nu \leqq \vartheta_j/2} \vartheta_\nu^\sigma = O(n\vartheta_j^{\sigma+1}) \quad (\sigma > -1),$$

$$\sum_{\substack{\vartheta_j/2 \leqq \vartheta_\nu \leqq 3\vartheta_j/2 \\ \vartheta_\nu \neq \vartheta_j}} |\vartheta_j - \vartheta_\nu|^\sigma = O(n) \cdot \begin{cases} \vartheta_j^{\sigma+1} & (\sigma < -1) \\ \log(n\vartheta_j) & (\sigma = -1) \end{cases}$$

$$\sum_{\vartheta_\nu \geqq 3\vartheta_j/2} \vartheta_\nu^\sigma = O(n\vartheta_j^{\sigma+1}) = O(n^{-\sigma}) \quad (\sigma < -1),$$

$$\sum_{\vartheta_\nu \geqq 3\vartheta_j/2} \vartheta_\nu^\sigma = O(n) \cdot \begin{cases} 1 & (\sigma > -1) \\ \log n & (\sigma = -1). \end{cases}$$

b.α) $0 < \vartheta_\nu \leqq 3\vartheta_j/2$ $(\leqq 3\pi/4)$. In diesem Fall ist $\vartheta_\nu = O(\vartheta_j)$ für $n \to \infty$, und es folgt aus den Hilfssätzen 7, (4.8—9) und 8 (unter Beachtung von $(\vartheta_j n)^{-1} = O(1)$) für $n \to \infty$

$$\sum_{\substack{0 < \vartheta_\nu \leqq 3\vartheta_j/2 \\ \vartheta_\nu \notin \mathfrak{M}_n}} \varphi_\nu^\mu(x;\gamma) = O(1) n^{m-\gamma} \vartheta_j^{\gamma-m} \quad (\mu = 0, 1, \ldots, m)$$

und damit nach (4.6) für $n \to \infty$

$$\sum_{\substack{0 < \vartheta_\nu \leqq 3\vartheta_j/2 \\ \vartheta_\nu \notin \mathfrak{M}_n}} \Phi_\nu^m(x;\gamma) = O(1) n^{m-\gamma} \vartheta_j^{\gamma-m}. \tag{4.12}$$

b.β) $3\vartheta_j/2 \leqq \vartheta_\nu < \pi$. Mittels $(n/\vartheta_j)^\mu \vartheta_\nu^{2\mu-2m} = O(1)(n/\vartheta_j)^m$ $(\mu=0, 1, \ldots, m)$ ergibt sich im Fall $3\vartheta_j/2 \leqq \vartheta_\nu \leqq \pi/2$ aus Hilfssatz 7, (4.10) für $\alpha \neq 0$ und $n \to \infty$

$$\varphi_\nu^\mu(x;\ \gamma) = O(1) n^{m-\gamma-2} \vartheta_j^{-2\alpha-m-1} \vartheta_\nu^{\gamma+2\alpha-1} \quad (\mu = 0, 1, \ldots, m, \alpha \neq 0)$$

Analog folgt für $\alpha=0$ und $n \to \infty$

$$\varphi_\nu^\mu(x;\ \gamma) = O(1) n^{m-\gamma-2} \vartheta_j^{-m+1} \vartheta_\nu^{\gamma-3} \quad (\mu = 0, 1, \ldots, m, \alpha = 0).$$

Mit diesen Abschätzungen und mit (4.6) und Hilfssatz 8 ergibt sich für $n \to \infty$

(4.13)

$$\sum_{3\vartheta_j/2 \leqq \vartheta_\nu \leqq \pi/2} \Phi_\nu^m(x;\gamma) = O(1) n^{m-\gamma-1} \vartheta_j^{-2\alpha-m-1} \cdot \begin{cases} 1 & (2\alpha+\gamma > 0 \text{ bzw. } \alpha = \gamma = 0) \\ \log n & (2\alpha+\gamma = 0, \alpha \neq 0) \\ \vartheta_j^{2\alpha+\gamma} & (-2 < 2\alpha+\gamma < 0). \end{cases}$$

Im Fall $\vartheta_\nu > \pi/2$ dagegen folgt aus Hilfssatz 7, (4.11)

$$\varphi_\nu^\mu(x;\ \gamma) = O(1) n^{m-\gamma-2} \vartheta_j^{-2\alpha-m-1} (\pi - \vartheta_\nu)^{\gamma+2\beta+1} \quad (\mu = 0, 1, \ldots, m),$$

womit sich im Fall $\gamma+2\beta \geqq -1$ wegen $0 < \pi - \vartheta_\nu \leqq \pi/2$ und im Fall $-2 < \gamma+2\beta < -1$ vermöge Hilfssatz 8

(4.14)
$$\sum_{\pi/2 < \vartheta_\nu < \pi} \Phi_\nu^m(x;\ \gamma) = O(1) n^{m-\gamma-1} \vartheta_j^{-2\alpha-m-1}$$

für $n \to \infty$ ergibt.

Zusammen ergeben die Teilabschätzungen (4.5), (4.12—14) für die durch (1.8) erklärte Summe $\mathscr{H}_n^m(x;\gamma)$ nach (4.1) für $n \to \infty$ und $0 \leqq x \leqq 1$ die Abschätzung

(4.15)

$$\mathscr{H}_n^m(x;\ \gamma) = O(1) n^{m-\gamma} \vartheta_j^{\gamma-m} \cdot \begin{cases} \max\{1, n^{-1}\vartheta_j^{-2\alpha-\gamma-1}\} & (2\alpha+\gamma > 0 \text{ bzw. } \alpha = \gamma = 0) \\ \max\{1, n^{-1}\vartheta_j^{-1}\log n\} & (2\alpha+\gamma = 0,\ \alpha \neq 0) \\ 1 & (-2 < 2\alpha+\gamma < 0). \end{cases}$$

Ebenso wie bei der Abschätzung von $\mathscr{L}_n^m(x;\gamma)$ in [5] läßt sich eine entsprechende Abschätzung auch für $-1 \leqq x \leqq 0$ bei Ersetzung von ϑ_j durch $(\pi - \vartheta_j)$ und von α durch β bzw. β durch α erhalten.

Im besonderen folgt aus (4.15)

Satz 1. *Bei vorgegebenem* $\alpha \geqq -1$ *und* $m \geqq 0$ *gilt für* $n \to \infty$

a) $$\mathscr{H}_n^m(x;\ \gamma) = O(1)$$

mit

1) $\gamma = m$ *für* $0 \leqq x \leqq 1$, *falls* $m+2\alpha < 0$ *und* $m = \alpha = 0$ *ist,*
und für $0 \leqq x \leqq 1-\delta$ $(0 < \delta < 1/2)$, *falls* $m+2\alpha > 0$ *ist,*

und mit

2) $\gamma=2m+2\alpha$ *für* $0\leqq x\leqq 1$, *falls* $m+2\alpha>0$ *ist*
bzw.

b) $$\mathscr{H}_n^m(x;\ \gamma)=O(\log n)$$

mit $\gamma=m$ *für* $0\leqq x\leqq 1$, *falls* $m+2\alpha=0$, $\alpha\neq 0$ *ist.*

Zusatz. *Ein entsprechender Satz gilt bei Ersetzung von* α *durch* β *in* $-1\leqq x\leqq 0$.

5. Abschätzung von $\mathfrak{H}_n^m(x;\gamma)$ mit $\omega_n(x)=P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ für $n\to\infty$

Die Abschätzung der durch (1.9) erklärten Summen

$$\mathfrak{H}_n^m(x;\ \gamma)=\sum_{\nu=1}^{n}\Psi_\nu^m(x;\ \gamma) \tag{5.1}$$

mit

$$\Psi_\nu^m(x;\ \gamma):=|D^m\mathfrak{h}_\nu(x)|(1-x_\nu^2)^{(\gamma-1)/2}n^{-\gamma+1}\qquad(\gamma\geqq 1) \tag{5.2}$$

erfolgt ebenso wie die von $\mathscr{H}_n^m(x;\gamma)$

a) $$\vartheta_\nu\in\mathfrak{M}_n;\ 0\leqq\vartheta\leqq\frac{\pi}{2}.$$

Ebenso wie bei der Herleitung von (4.5), nur mit Hilfe von (2.9) statt (2.4), ergibt sich für $n\to\infty$

$$\sum_{\vartheta_\nu\in\mathfrak{M}_n}\Psi_\nu^m(x;\ \gamma)=O(1)n^{m-\gamma}\vartheta_j^{\gamma-m} \tag{5.3}$$

b) $\vartheta_\nu\notin\mathfrak{M}_n$; $0\leqq\vartheta\leqq\pi/2$. In Analogie zu (4.6) schätzen wir im Fall $\vartheta_\nu\notin\mathfrak{M}_n$ aufgrund von (2.6) mit (2.7) jeden Summanden $\Psi_\nu^m(x;\gamma)$ wie folgt weiter ab

$$\Psi_\nu^m(x;\ \gamma)\leqq\sum_{\mu=0}^{m}\psi_\nu^\mu(x;\ \gamma) \tag{5.4}$$

mit

$$\psi_\nu^\mu(x;\ \gamma):=\frac{m!(1-x_\nu^2)^{(\gamma-1)/2}n^{-\gamma+1}}{\mu![DP_n^{(\alpha,\beta)}(x_\nu)]^2}|x-x_\nu|^{\mu-m-1}|D^\mu[P_n^{(\alpha,\beta)}(x)]^2|. \tag{5.5}$$

Für das Verhalten des Summanden $\psi_\nu^\mu(x;\gamma)$ folgt in Analogie zur Herleitung der Hilfssätze 6 und 7 für $0\leqq\vartheta\leqq\pi/2$

(5.6)

$$\psi_\nu^\mu(x;\ \gamma)=O(1)\,n^{\mu-\gamma-1}\vartheta_j^{-2\alpha-\mu-1}|\vartheta_j^2-\vartheta_\nu^2|^{\mu-m-1}\begin{cases}\vartheta_\nu^{2\alpha+2+\gamma} & \left(0<\vartheta_\nu\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)\\ (\pi-\vartheta_\nu)^{2\beta+2+\gamma} & \left(\dfrac{\pi}{2}\leqq\vartheta_\nu<\pi\right)\end{cases}$$

sowie

Hilfssatz 9. *Im Fall* $\vartheta_\nu \notin \mathfrak{M}_n$, $0 \leqq \vartheta \leqq \pi/2$ *gelten für* $n \to \infty$

$$\psi_\nu^\mu(x;\ \gamma) = O(1) n^{m-1-\gamma} \vartheta_j^{\gamma-1-m} \quad \left(0 < \vartheta_\nu \leqq \frac{2}{3}\vartheta_j\right) \tag{5.7}$$

$$\psi_\nu^\mu(x;\ \gamma) = O(1) n^{\mu-1-\gamma} \vartheta_j^{\gamma-m} |\vartheta_j - \vartheta_\nu|^{\mu-m-1} \quad \left(\frac{2}{3}\vartheta_j \leqq \vartheta_\nu \leqq \frac{3}{2}\vartheta_j;\ \vartheta_\nu \notin \mathfrak{M}_n\right) \tag{5.8}$$

$$\psi_\nu^\mu(x;\ \gamma) = O(1) n^{\mu-1-\gamma} \vartheta_j^{-2\alpha-\mu-1} \vartheta_\nu^{2\mu-2m+\gamma+2\alpha} \quad \left(\frac{3}{2}\vartheta_j \leqq \vartheta_\nu \leqq \frac{\pi}{2}\right) \tag{5.9}$$

(5.10)

$$\psi_\nu^\mu(x;\ \gamma) = O(1) n^{\mu-1-\gamma} \vartheta_j^{-2\alpha-\mu-1} (\pi - \vartheta_\nu)^{\gamma+2\beta+2} \quad \left(\frac{3}{2}\vartheta_j \leqq \vartheta_\nu \quad \text{und} \quad \frac{\pi}{2} < \vartheta_\nu < \pi\right)$$

$$(\mu = 0, 1, \ldots, m)$$

b.α) $0 < \vartheta_\nu < 3\vartheta_j/2$ ($\leqq 3\pi/4$). Mit $\vartheta_\nu = O(\vartheta_j)$ für $n \to \infty$ folgt nun mit Hilfe der Hifssätze 9, (5.7—8) und 8 (analog zur Herleitung von (4.12))

$$\sum_{\substack{0 < \vartheta_\nu \leqq 3\vartheta_j/2 \\ \vartheta_\nu \notin \mathfrak{M}_n}} \Psi_\nu^m(x;\ \gamma) = O(1) n^{m-\gamma} \vartheta_j^{\gamma-m} \log(n\vartheta_j). \tag{5.11}$$

b.β) $3\vartheta_j/2 \leqq \vartheta_\nu < \pi$. Ebenfalls mittels $(n/\vartheta_j)^\mu \vartheta_\nu^{2\mu-2m} = O(1)(n/\vartheta_j)^m$ ($\mu = 0, 1, \ldots, m$) ergibt sich aus (5.9) für $n \to \infty$

$$\psi_\nu^\mu(x;\ \gamma) = O(1) n^{m-1-\gamma} \vartheta_j^{-m-2\alpha-1} \vartheta_\nu^{\gamma+2\alpha} \quad (\mu = 0, 1, \ldots, m)$$

und damit für $n \to \infty$

$$\sum_{3\vartheta_j/2 < \vartheta_\nu \leqq \pi/2} \Psi_\nu^m(x;\ \gamma) = O(1) n^{m-\gamma} \vartheta_j^{-2\alpha-m-1} \tag{5.12}$$

Im Fall $\vartheta_\nu > \pi/2$ folgt schließlich aus (5.10) entsprechend der Herleitung von (4.14) für $n \to \infty$

$$\sum_{\pi/2 < \vartheta_\nu < \pi} \Psi_\nu^m(x;\ \gamma) = O(1) n^{m-\gamma} \vartheta_j^{-2\alpha-m-1}. \tag{5.13}$$

Zusammen ergeben die Teilabschätzungen (5.3), (5.11—13) für $0 \leqq x \leqq 1$ und $n \to \infty$ die Abschätzung

$$\mathfrak{H}_n^m(x;\ \gamma) = O(1) n^{m-\gamma} \vartheta_j^{\gamma-m} \max\{1, \log(n\vartheta_j), \vartheta_j^{-\gamma-2\alpha-1}\}. \tag{5.14}$$

Hieraus folgt

Satz 2. *Bei vorgegebenem* $\alpha > -1$ *und* $m \geqq 0$ *gilt für* $n \to \infty$.

a) $\mathfrak{H}_n^m(x;\gamma) = O(1)$ *mit* $\gamma = 2m + 2\alpha + 1$ *für* $0 \leqq x \leqq 1$ *und* $m \geqq 1$ *bzw.* $m = 0$, $\alpha > 0$

b) $\mathfrak{H}_n^m(x; \gamma) = O(\log n)$ *mit* $\gamma = m$ *für* $0 \leqq x \leqq 1-\delta$ $(0<\delta<1/2)$ *und* $m \geqq 1$

c) $\mathfrak{H}_n^0(x; 1) = O(n^{-1}\log n)$ *für* $0 \leqq x \leqq 1-\delta$ $(0<\delta<1/2)$ *und* $\alpha>0$

$\mathfrak{H}_n^0(x; 1) = O(\max\{n^{-1}\log n, n^{2\alpha}\})$ *für* $0 \leqq x \leqq 1$ *und* $-1<\alpha\leqq 0$.

Zusatz. *Ein entsprechender Satz gilt bei Ersetzung von* α *durch* β *in* $-1 \leqq x \leqq 0$.

6. Approximationsaussagen

Für die Abweichung des m-mal differenzierten Interpolationspolynoms von Hermite von $f^{(m)}$ gilt mit (1.1—4), (1.8—9), falls Q_{2n-1} ein Polynom vom Grad $\leqq 2n-1$ ist

$$|H_n^{(m)}[f;\, x] - f^{(m)}(x)| \leqq |H_n^{(m)}[f;\, x] - Q_{2n-1}{}^{(m)}(x)| + |f^{(m)}(x) - Q_{2n-1}{}^{(m)}(x)| \tag{6.1}$$

und

$$|H_n^{(m)}[f;\, x] - Q_{2n-1}{}^{(m)}(x)| = |H_n^{(m)}[f - Q_{2n-1};\, x]| \leqq \tag{6.2}$$

$$\leqq \sum_{\nu=1}^{n} |D^m h_\nu(x)| \left(\frac{\sqrt{1-x_\nu^2}}{n}\right)^{\gamma} \frac{|f(x_\nu) - Q_{2n-1}(x_\nu)|\, n^\gamma}{(\sqrt{1-x_\nu^2})^\gamma} +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{n} |D^m \mathfrak{h}_\nu(x)| \left(\frac{\sqrt{1-x_\nu^2}}{n}\right)^{\gamma-1} \frac{|f'(x_\nu) - Q'_{2n-1}(x_\nu)|\, n^{\gamma-1}}{(\sqrt{1-x_\nu^2})^{\gamma-1}}$$

$$\leqq \mathscr{H}_n{}^m(x;\, \gamma) \max_{1\leqq\nu\leqq n} \frac{|f(x_\nu) - Q_{2n-1}(x_\nu)|\, n^\gamma}{(\sqrt{1-x_\nu^2})^\gamma} + \mathfrak{H}_n^m(x;\, \gamma) \max_{1\leqq\nu\leqq n} \frac{|f'(x_\nu) - Q'_{2n-1}(x_\nu)|\, n^{\gamma-1}}{(\sqrt{1-x_\nu^2})^{\gamma-1}}$$

(man beachte $x_\nu \neq \pm 1$, $\nu = 1, \ldots, n$). Für die weitere Abschätzung der Terme in (6.1—2) ziehen wir den Approximationssatz von Jackson—Timan für simultane Approximation heran: Für k-mal stetig differenzierbares f mit dem Stetigkeitsmodul $\omega(f^{(k)}, \delta)$ existiert zu jedem $n \geqq k$ ein Polynom Q_n vom Grad $\leqq n$ mit der Eigenschaft

$$|f^{(\varkappa)}(x) - Q_n^{(\varkappa)}(x)| \leqq c_\varkappa (\Delta_n(x))^{k-\varkappa} \omega(f^{(k)}, \Delta_n(x)); \tag{6.3}$$

$$\Delta_n(x) = \max\left\{\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}, \frac{1}{n^2}\right\}, \quad x \in [-1, 1]$$

$(\varkappa = 0, 1, \ldots, k)$ mit (von f und n unabhängigen) positiven Konstante $c_\varkappa$ (vgl. z. Bsp. [11], [4], [7]).

In (6.1) ist $\varkappa = m(\leqq k)$ und in (6.2) $\varkappa = 0$ und $\varkappa = 1$ zu wählen. Gleichmäßige Konvergenz für die in Frage kommenden Intervalle I liegt dann vor, wenn die rechte Seite von (6.1) von der Ordnung $o(1)$ gleichmäßig bezüglich $x \in I$ ist. Aus den Sätzen 1 und 2 folgt sodann

Satz 3. *Es sei f in $[-1, 1]$ mindestens m-mal stetig differenzierbar, $H_n[f]$ das zugehörige Hermitesche Interpolationspolynom mit Jacobischen Abszissen zu vorgege-*

benen Parameter $\alpha > -1$ *und* $\beta > -1$. *Die Folge* $H_n^{(m)}[f;\, x]$ *konvergiert für* $n \to \infty$ *gleichmäßig gegen* $f^{(m)}(x)$

a) *für* $-1+\delta \leqq x \leqq 1$ $(0<\delta<1/2)$ *im Fall*

i) $m \geqq 1$ *oder* $m=0$, $\alpha>0$ *unter der zusätzlichen Voraussetzung* $f^{(k)}$ *mit* $k=2m+[2\alpha+1]$ *ist für* $[-1,1]$ *aus der Klasse* $\operatorname{lip}(2\alpha+1-[2\alpha+1])$*) *bzw. im Fall*

ii) $m=0$, $-1<\alpha\leqq 0$ *unter der zusätzlichen Voraussetzung* f' *stetig in* $[-1,1]$

b) *für* $-1+\delta\leqq x\leqq 1-\delta$ $(0<\delta<1/2)$ *im Fall*

i) $m\geqq 1$ *unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß* $f^{(m)}$ in $[-1,1]$ *einer Dini-Lipschitzbedingung**) *genügt, bzw. im Fall*

ii) $m=0$, $\alpha>0$ *unter der zusätzlichen Voraussetzung* f' *stetig in* $[-1,1]$.

Eine entsprechende Aussage gilt in $-1\leqq x\leqq 1-\delta$ *bei Vertauschung von* α *mit* β *und in* $-1\leqq x\leqq 1$ *bei Ersetzung von* α *durch* $\max(\alpha,\beta)$.

Zusatz a) *Im Fall* $m=0$, $-1<\alpha\leqq 0$ *folgt für die Konvergenzgeschwindigkeit* $H_n[f;\, x]-f(x)=o(\max\{n^{-1}\log n,\, n^{2\alpha}\})$ *(gleichmäßig für* $-1+\delta\leqq x\leqq 1$*), falls* f' *stetig in* $[-1,1]$ *vorausgesetzt wird.*

Zusatz b) *Für* $-1<\alpha<0$ *konvergieren die verallgemeinerten Interpolationspolynome von Hermite—Fejér gleichmäßig für* $-1+\delta\leqq x\leqq 1$ $(0<\delta<1/2)$. *Für* $\alpha\geqq 0$ *liegt für* $-1+\delta\leqq x\leqq 1-\delta$ *gleichmäßige Konvergenz dieser Polynome vor.*

Bemerkungen 1. Beim üblichen Abschätzungsverfahren (Lebesguefunktion und Jacksonsatz) erhalten wir statt (6.2) aus (4.15) und (5.14) im Fall $-1<\alpha\leqq 0$

$$(6.2')\qquad \ldots \leqq \mathcal{H}_n^{m}(x;\, 0)n^{-\gamma}+\mathfrak{H}_n^{m}(x;\, 1)n^{-\gamma+1} = O(1)n^{2m-\gamma}+O(1)n^{2m+2\alpha+1-\gamma}.$$

Im Fall $-1<\alpha<-1/2$ erhalten wir hiermit gleichmäßige Konvergenz für $2m$-mal stetig differenzierbares f gegenüber $f^{(2m+[2\alpha+1])}\in\operatorname{lip}(2\alpha+1-[2\alpha+1])$ in Satz 3. Bezüglich des 1. Terms erhalten wir sogar eine Verbesserung um den Faktor $n^{2\alpha}$, falls $-1<\alpha<0$ gilt.

2. Der Vergleich der Konvergenzaussagen der $m(\geqq 1)$-mal differenzierten Interpolationspolynome von Lagrange und Hermite zeigt, daß für $-1<\alpha<1/2$ das m-mal differenzierte Hermitesche Interpolationspolynom in $-1+\delta\leqq x<1$ günstigere Abschätzungen liefert (es gilt $f^{(k)}\in\operatorname{lip} k'$ mit $k=2m+[2\alpha+1]$, $k'=2\alpha+1-[2\alpha+1]$ im Fall von Hermite und $k=2m+[\alpha+1/2]$, $k'=\alpha+1/2-[\alpha+1/2]$ im Fall von Lagrange).

---

*) $g\in\operatorname{lip}\alpha :\Leftrightarrow \omega(g,\delta)=o(\delta^\alpha)$ $(0\leqq\alpha<1)$; g genügt der Dini—Lipschitz—Bedingung: $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \omega(g,\delta)=o((\log 1/\delta)^{-1})$ für $\delta\to 0$.

3. Mithilfe von (4.15) und (5.14) lassen sich wie in [15] die Approximationsaussagen von $H_n^{(m)}[f; x]$ für $x=\cos \vartheta(n)$, $\vartheta(n)=o(1)$ $(n\to\infty)$ verschärfen.

4. Sind die Strukturbedingungen der betrachteten Funktionen besser als in Satz 3 angegeben, so erhält man mithilfe von (4.15) und (5.14) sofort aus (6.2) und (6.3) sehr gute Abschätzungen über die Konvergenzgeschwindigkeit.

5. In den Arbeiten [1], [2] von Badkov betr. die Approximation von Funktionen durch Partialsummen der Jacobi—Fourier-Entwicklung werden ebenfalls feinere Methoden angewandt, die Approximationspolynome mit verbessertem Randverhalten benutzen.

Literatur

[1] V. M. Badkov, Approximation of functions by Fourier—Jacobi Sums, *Dokl. Akad. Nauk SSSR,* **167** (1966), 731—834; *Soviet Math. Dokl.,* 7 (1966), 450—453.

[2] V. M. Badkov, Estimates of Lebesgue functions and remainders of Fourier—Jacobi series, *Sibirsk. Mat. Ž.,* **9** (1968), 1263—1283; *Siberian Math., J.* **9** (1968), 947—962.

[3] P. Erdős and P. Turán, On the rôle of the Lebesgue functions in the theory of Lagrange interpolation, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.,* **6** (1955), 47—65.

[4] V. N. Malozemov, Simultaneous approximation of a function and its derivatives by algebraic polynomials, *Dokl. Akad. Nauk SSSR,* **170** (1966), 773—775.

[5] L. Neckermann und P. O. Runck, Über Approximationseigenschaften differenzierter Lagrangescher Interpolationspolynome mit Jacobischen Abszissen, *Numer. Math.,* **12** (1968), 159—169.

[6] P. O. Runck, Über Konvergenzfragen von Folgen linearer Operatoren in Banachräumen, *ISNM Vol. 7, Funktionalanalysis, Approximationstheorie, Numerische Mathematik,* Birkhäuser (Basel—Stuttgart, 1967), 208—212.

[7] P. O. Runck, Bemerkungen zu den Approximationssätzen von Jackson und Jackson—Timan, *ISNM Vol. 10. Abstract Spaces and Approximation,* Birkhäuser (Basel—Stuttgart, 1969), 303—308.

[8] P. O. Runck, Über differenzierte Interpolationspolynome. *Proc. International Conf. on Constructive Function Theory, Varna* (1970), (Sofia, 1972).

[9] J. Szabados, On Hermite—Fejér interpolation for the Jacobi abscissas, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.,* **23** (1972), 449—464.

[10] G. Szegő, *Orthogonal polynomials,* Revised ed., AMS (New York, 1959).

[11] A. F. Timan, *Theory of approximation of functions of a real variable,* translation, Pergamon Press, (Oxford, 1963).

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
UNIVERSITÄT LINZ
4040 LINZ-AUHOF, ÖSTERREICH

INSTITUTE FÜR MATHEMATIK
UNIVERSITÄT WÜRZBURG
D—87 WÜRZBURG, IMHUBLAND, FRG